Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов для проведения в 2021 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ по математике

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалов, количестве заданий, их форме и уровне сложности.

Задания демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольные измерительные материалы в 2021 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов — в кодификаторах элементов содержания и требований к уровню подготовки выпускников организаций образования для проведения единого государственного экзамена 2021 г. по математике.

Экзаменационная работа состоит из двух частей, которые различаются по содержанию, сложности и числу заданий. Определяющим признаком каждой части работы является форма заданий:

- часть 1 содержит 11 заданий (задания 1–11) с кратким ответом;
- часть 2 содержит 4 задания (задания 12–15) с кратким ответом и шесть заданий (задания 16–21) с развёрнутым ответом.

По уровню сложности задания распределяются следующим образом: задания 1–11 имеют базовый уровень, задания 12–19 – повышенный уровень, задания 20 и 21 относятся к высокому уровню сложности.

Задания первой части предназначены для определения математических компетентностей выпускников образовательных организаций, реализующих программы среднего (полного) общего образования на базовом уровне.

Задание с кратким ответом (1-15) считается выполненным, если в бланке ответов № 1 зафиксирован верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Задания 16–21 с развёрнутым ответом, в числе которых четыре задания повышенного и два задания высокого уровней сложности, предназначены для более точной дифференциации абитуриентов вузов.

Правильное решение каждого из заданий 1-15 оценивается одним баллом.

Правильное решение каждого из заданий 16 - 17 оценивается- 2 баллами; 18 и 19 — 3 баллами; 20 и 21 —4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы — 33 балла.

К каждому заданию с развёрнутым ответом, включённому в демонстрационный вариант, предлагается одно из возможных решений. Приведённые критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений

Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов, система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 21 задание.

Часть 1 содержит 11 заданий базового уровня сложности с кратким ответом.

Часть 2 содержит 4 задания повышенного уровня сложности с кратким ответом и 6 заданий повышенного и высокого уровня сложности с развёрнутым ответом.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–15 записываются в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

Ответ: _–0,8_ . 10 | - | 0 | , | 8

При выполнении заданий 16–21 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой, капиллярной или перьевой ручек.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

Желаем успеха!

Ответом к заданиям 1–15 является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в *БЛАНК ОТВЕТОВ* № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. *Простейшие задачи.*

В университетскую библиотеку привезли новые учебники для трёх курсов, по 430 штук для каждого курса. В книжном шкафу 6 полок, на каждой полке помещается 30 учебников. Какое наименьшее количество шкафов потребуется, чтобы в них разместить все новые учебники?

Решение.

Всего привезли $430 \cdot 3 = 1290$ учебников. В книжном шкафу помещается $30 \cdot 6 = 180$ учебников. Разделим 1290 на 180:

$\frac{1290}{180} = \frac{129}{18} = 7\frac{1}{6}$.

Значит, чтобы вместить все книги понадобится 8 шкафов.

Ответ: 8.

2. __Задачи на проценты.__

При оплате услуг через платежный терминал взимается комиссия 5%. Терминал принимает суммы кратные 10 рублям. Аня хочет положить на счет своего мобильного телефона не меньше 400 рублей. Какую минимальную сумму она должна положить в приемное устройство данного терминала?

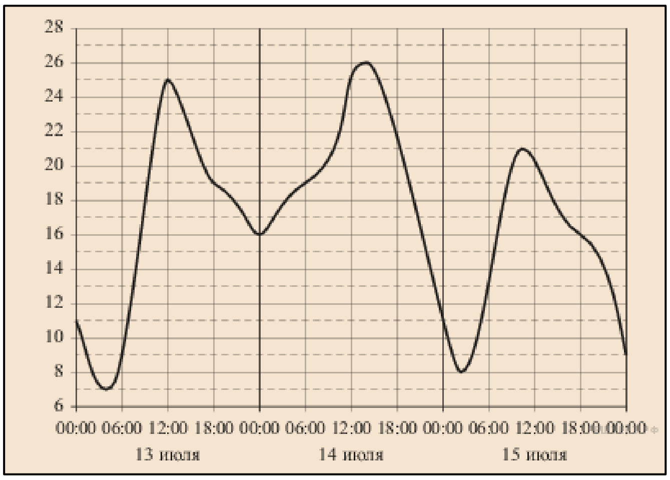
Решение.

С учетом комиссии, Аня должна внести в приемное устройство сумму не менее 400 + 400 · 0,05 = 420 рублей. Проверим, достаточно ли этой суммы: 5% от 420 руб. составляют 21 руб. (это комиссия), оставшиеся 399 руб. пойдут на счет телефона. Но Аня хотела положить не менее 400 руб., следовательно, надо положить больше 420 руб. Проверим 430 руб.: комиссия составляет 21,5 руб., остается 408,5 руб. Достаточно.

Ответ: 430.

3. __Чтение графиков и диаграмм.__

На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. По горизонтали указывается дата и время суток, по вертикали — значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 15 июля. Ответ дайте в градусах Цельсия.



Решение.

Из графика видно, что 15 июля наибольшая температура составляла 21 °C, а наименьшая 8 °C. Их разность составляет 13 °C.

Ответ: 13.

__4. Работа с формулами.__

Энергия заряженного конденсатора *W* (в Дж) вычисляется по формуле $W = \frac{q^2}{2C}$, **где *C* — ёмкость конденсатора (в Ф), а *q* — заряд на одной обкладке конденсатора (в Кл). Найдите энергию (в Дж) конденсатора ёмкостью 10^{-4} Ф, если заряд на его обкладке равен 0,0012 Кл.**

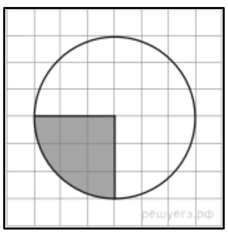
Решение.

Найдем энергию конденсатора:

$$W = \frac{q^2}{2C} = \frac{0{,}0012^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{12^2 \cdot (10^{-4})^2}{2 \cdot 10^{-4}} = \frac{144 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-4}} = 72 \cdot 10^{-4} = 0{,}0072.$$

Ответ: 0,0072.

__5. *Квадратная решётка, координатная плоскость.*__



На клетчатой бумаге с размером клетки $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ см $\times$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ см **изображён круг. Найдите площадь закрашенного сектора. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.**

Решение.

Площадь фигуры равна четверти площади круга, радиус которого равен $\frac{3}{\sqrt{\pi}}$ см. Поэтому

$$S = \frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi \cdot \left(\frac{3}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 2,25 \text{ см}^2.$$

Ответ: 2,25.

6. <u>Начала теории вероятностей.</u>

Фабрика выпускает сумки. В среднем 1 сумка из 80 имеет скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов.

Решение.

В среднем без дефектов выпускают 79 сумок из каждых 80, поэтому искомая вероятность равна 0,9875.

$$\frac{79}{80} = 0,9875.$$

Ответ: 0,9875.

<u>7. Простейшие уравнения.</u>

Решите уравнение $\sqrt{6+5x} = x$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите меньший из корней.

Решение.

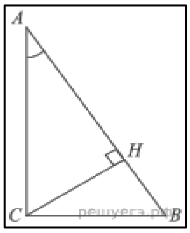
Возведем в квадрат:

$$\sqrt{6+5x} = x \Leftrightarrow \begin{cases} 6+5x = x^2, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 6, \end{array}\right. \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Уравнение имеет единственный корень, он и является ответом.

Ответ: 6.

8. *<u>Планиметрия : задачи , связанные с углами</u>*.



В треугольнике *ABC* угол *C* равен 90°, *CH* — высота, *BC* = 8 , *sinA* = 0,5. Найдите *BH*.

Решение.

Углы *A* и *HCB* равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами. Поэтому $BH = BC\sin\angle HCB = BC\sin A = 8 \cdot 0,5 = 4.$

Ответ: 4.

<u>9. Анализ графиков и диаграмм.</u>

Каждому из четырёх графиков функций в первом перечне соответствует одно из значений производной функции *f*(*x*) в точке во втором перечне. Установите соответствие между графиками и значениями производной.

ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

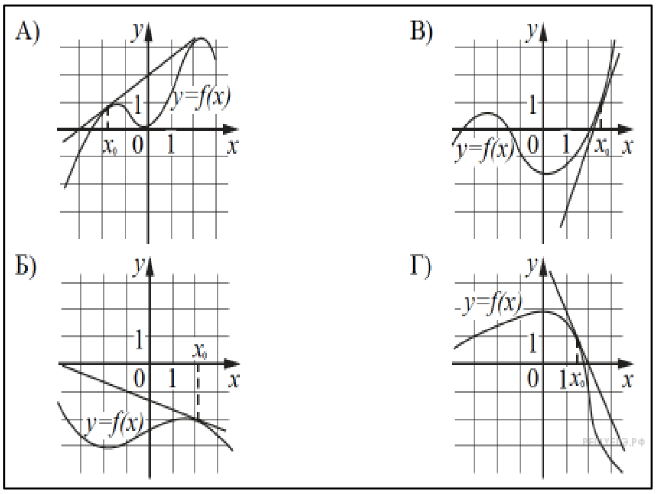
1) $-\frac{1}{3}$

2) -2

3) $\frac{2}{3}$

4) $\frac{5}{2}$

ГРАФИКИ



Запишите в ответ цифры, расположив их в порядке, соответствующем буквам:

А	Б	В	Г

Пояснение.

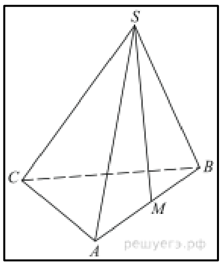
Значение производной в точке равно угловому коэффициенту касательной, проведённой в этой точке. Он положителен и меньше 1, если касательная наклонена к положительному направлению оси абсцисс под углом меньше 45°; больше 1, если угол наклона больше 45°, но меньше 90°. Он отрицателен и меньше -1, если угол наклона больше 90^0, но меньше 135^0, он отрицателен и больше -1 , если угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс больше 135^0, но меньше 180^0.

Таким образом, графику А соответствует — 3, графику Б — 1, графику В — 4, графику Г — 2.

Ответ: 3142

10. *Стереометрия.*

В правильной треугольной пирамиде *SABC* точка *M* – середина ребра *AB, S* – вершина. Известно, что *BC* = 3, а площадь боковой поверхности пирамиды равна 45. Найдите длину отрезка *SM*.



Решение.

Найдем площадь грани SAB: $$S_{SAB}=\frac{S_{\text{бок}}}{3}=\frac{45}{3}=15.$$

Отрезок SM является медианой правильного треугольника SAB, а значит, его высотой. Тогда

$$SM=\frac{2S_{SAB}}{AB}=\frac{2S_{SAB}}{BC}=\frac{2\cdot 15}{3}=10.$$

Ответ: 10.

11. Выбор оптимального варианта

Для изготовления книжных полок требуется заказать 48 одинаковых стекол в одной из трех фирм. Площадь каждого стекла 0,25 м^2. В таблице приведены цены на стекло, а также на резку стекол и шлифовку края. Сколько рублей будет стоить самый дешевый заказ?

Фирма	Цена стекла (руб. за 1 м^2)	Резка и шлифовка (руб. за одно стекло)
А	420	75
Б	440	65
В	470	55

Пояснение.

Общая площадь стекла равна $48 \cdot 0{,}25 = 12$ м^2. Рассмотрим различные варианты.

Стоимость заказа в фирме *А* складывается из стоимости стекла $420 \cdot 12 = 5040$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $75 \cdot 48 = 3600$ руб. и равна 8640 руб.

Стоимость заказа в фирме *Б* складывается из стоимости стекла $440 \cdot 12 = 5280$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $65 \cdot 48 = 3120$ руб. и равна 8400 руб.

Стоимость заказа в фирме *В* складывается из стоимости стекла $470 \cdot 12 = 5640$ руб. и стоимости его резки и шлифовки $55 \cdot 48 = 2640$ руб. и равна 8280 руб.

Стоимость самого дешевого заказа составит 8280 рублей.

Ответ: 8280.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

ЧАСТЬ 2

Ответом на задания 12–15 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

12. Вычисления и преобразования

Найдите значение выражения $(1-\log_5 40)(1-\log_8 40)$.

Решение.

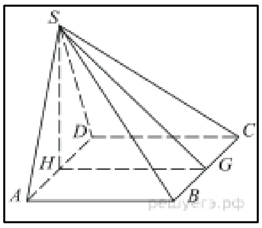
Выполним преобразования:

$$(1-\log_5 40)(1-\log_8 40) = (1-\log_5 5\cdot 8)(1-\log_8 8\cdot 5) =$$

$$= (1-1-\log_5 8)(1-1-\log_8 5) = -\log_5 8\cdot(-\log_8 5) = 1.$$

Ответ: 1.

13. Стереометрия.



Основанием пирамиды служит прямоугольник, одна боковая грань перпендикулярна плоскости основания, а три другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 60°. Высота пирамиды равна 6. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Поскольку боковые грани SAB, SDC и SBC наклонены к плоскости основания под углом 60°, углы A и D в треугольнике ASD и угол G в треугольнике SGH равны 60°.

Поэтому треугольник ASD — равносторонний, а его сторона связана с высотой формулой $AD = \frac{2}{\sqrt{3}}SH$, откуда $AD = 4\sqrt{3}$.

Из прямоугольного треугольника SHG находим:

$$HG = SH\operatorname{ctg}\angle SGH = 6\operatorname{ctg}60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Поскольку $ABCD$ — прямоугольник, его площадь равна произведения сторон:

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = AD \cdot HG = 4\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 24.$$

Осталось найти объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 24 \cdot 6 = 48.$$

Ответ: 48.

14*. Наибольшее и наименьшее значение функции.*

Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+5) - 2x + 9$.

Решение.

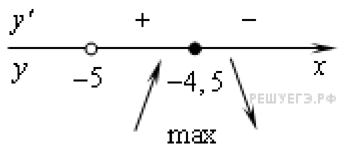
Функция определена и дифференцируема на $(-5; +\infty)$. Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{1}{x+5} - 2.$$

Найдем нули производной:

$$\frac{1}{x+5} - 2 = 0 \Leftrightarrow x + 5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -4{,}5.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x = -4{,}5$.

Ответ: −4,5.

15. *Текстовые задачи*.

Семья состоит из мужа, жены и их дочери студентки. Если бы зарплата мужа увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата жены?

Решение.

Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%», означает, что 2/3 стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся

стипендия дочери составляет 6% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ дохода семьи.
Ответ: 27.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1

Для записи решений и ответов на задания 16-21 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (16, 17 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

16. ***<u>Уравнения, системы уравнений</u>***

а) Решите уравнение: $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а) $\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \Leftrightarrow \cos x = \cos 2x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = x + 2\pi k, \ \ k \in Z \\ 2x = -x + 2\pi k, \ \ k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k, k \in Z \\ x = \frac{2\pi k}{3}, k \in Z \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{2\pi k}{3}, k \in Z$$

б) Найдем все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$:

$\pi \le \frac{2\pi k}{3} \le \frac{5\pi}{2} \Leftrightarrow 6\pi \le 4\pi k \le 15\pi \Leftrightarrow 6 \le 4k \le 15 \Leftrightarrow 1{,}5 \le k \le 3{,}75$

Т.к. $k \in Z$, то $k \in \{2;\ 3\}$

Если $k = 2$, то $x = \frac{4\pi}{3}$.
Если $k = 3$, то $x = 2\pi$.

Ответ: а) $\frac{2\pi k}{3}, k \in Z$
б) $\frac{4\pi}{3}; 2\pi$

или

а) Решите уравнение: $5 \cdot 4^{x^2+4x+1} + 20 \cdot 10^{x^2+4x} - 7 \cdot 25^{x^2+4x+1} = 0$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3; 1]$
Решение.

а) $5 \cdot 4^{x^2+4x+1} + 20 \cdot 10^{x^2+4x} - 7 \cdot 25^{x^2+4x+1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5 \cdot 2^{2(x^2+4x+1)} + 2 \cdot (2 \cdot 5)^{x^2+4x+1} - 7 \cdot 5^{2(x^2+4x+1)} = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2(x^2+4x+1)} + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+4x+1} - 7 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+4x+1} = 1; \\ \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+4x+1} = -\frac{7}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{x^2+4x+1} = 1 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm \sqrt{3}$$

б) Оценим $\sqrt{3}$ целыми числами: $1 < \sqrt{3} < 2$. Тогда $-1 < -2 + \sqrt{3} < 0$ и $-4 < -2 - \sqrt{3} < -3$

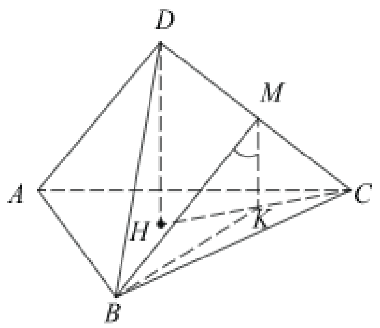
Значит, отрезку $[-3; 1]$ принадлежит только $x = -2 + \sqrt{3}$

Ответ: а) $-2 \pm \sqrt{3}$;

б) $-2 + \sqrt{3}$

17. ***Углы и расстояния в пространстве***

В правильном тетраэдре *ABCD* найдите угол между высотой тетраэдра *DH* и медианой *BM* боковой грани *BCD*.



Решение.

1) Т.к. BM – медиана боковой грани BCD, то M – середина ребра CD. Рассмотрим треугольник DHC – прямоугольный, т.к. DH - высота тетраэдра, следовательно, DH ⊥ (ABC). В треугольнике DHC проведем через точку M среднюю линию MK.

По свойству средней линии MK ∥ DH, значит, MK ⊥ (ABC).

2) Т.к. MK ∥ DH, то

$\angle(DH, BM) = \angle(MK, BM) = = \angle BMK$

3) MK ⊥ (ABC) и BK ⊂ (ABC), следовательно, MK ⊥ BK, т.е. треугольник BMK – прямоугольный.
4) Т.к. тетраэдр ABCD правильный, то все его грани – правильные треугольники. Примем длину ребра тетраэдра равной a. Тогда каждая высота (медиана, биссектриса) грани правильного тетраэдра будет равна $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $BM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
5) Т.к. DH – высота правильного тетраэдра, то H – центр правильного треугольника ABC, и $CH = \frac{2}{3} \cdot a\frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$
6) Из прямоугольного треугольника DHC по теореме Пифагора найдем DH: $DH = \sqrt{DC^2 - CH^2}$, откуда $DH = a\frac{\sqrt{6}}{3}$
7) Т.к. MK ∥ DH, то треугольники DHC и MKC подобны, т.е. $\frac{MK}{DH} = \frac{MC}{DC}$. Получим: $MK = \frac{1}{2}DH$, или $MK = a\frac{\sqrt{6}}{6}$
8) В прямоугольном треугольнике BMK найдем косинус угла BMK:

$$\cos BMK = \frac{MK}{BM} \Rightarrow \cos BMK = \frac{a\frac{\sqrt{6}}{6}}{a\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \angle BMK = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$$

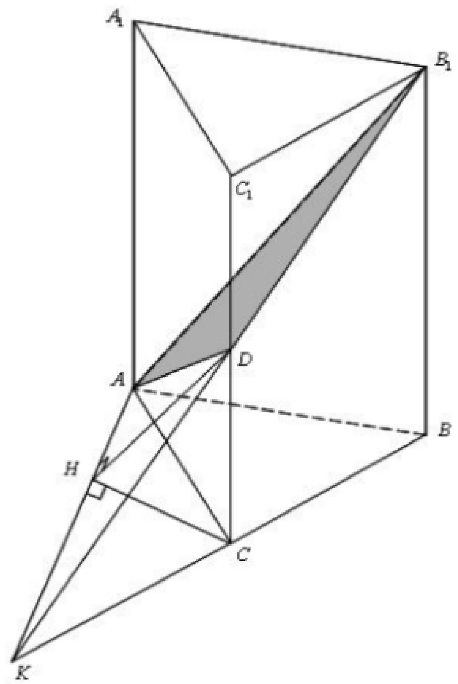
Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$

или

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение.

I способ



1) Заметим, что A – общая точка плоскостей ABC и ADB_1, следовательно, плоскости пересекаются. Найдем прямую пересечения. В плоскости BCC_1 найдем точку K – точку пересечения прямых B_1D и BC. Точка K – общая точка плоскостей ABC и ADB_1. Получим: AK – прямая пересечения плоскостей ABC и ADB_1.
2) Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK. Заметим, что призма $ABCA_1B_1C_1$ правильная, поэтому $DC \perp (ABC)$.
   DH – наклонная к плоскости ABC. Тогда HC – проекция наклонной DC на плоскость ABC, прямая AK лежит в плоскости ABC. По построению наклонная DH перпендикулярна прямой AK. Тогда по теореме о трех перпендикулярах: $CH \perp AK$.
   Имеем: $CH \perp AK$ и $CH \subset (ABC)$; $DH \perp AK$ и $DH \subset (ADB_1)$, откуда следует: $\angle(ABC; ADB_1) = \angle DHC$.
3) D — середина ребра CC_1 и $DC \parallel BB_1$, тогда DC – средняя линия треугольника B_1BK, откуда: BC = CK = 1.
4) Т.к. призма правильная, то треугольник ABC – правильный, т.е. AB=BC=AC =1 и $\angle BCA = 60^o$. Тогда $\angle ACK = 120^o$ (по свойству смежных углов).
5) Т.к. CK =1 и AC =1, то треугольник ACK – равнобедренный. Т.к. $\angle ACK = 120^o$, то $\angle AKC = 30^o$
6) $\angle AKC = 30^o$ и $DH \perp AK$, тогда в прямоугольном треугольнике CHK катет HC равен половине гипотенузы, т.е. $HC = \frac{1}{2}$
7) Рассмотрим треугольник DHC – прямоугольный, т.к. $DC \perp (ABC)$:

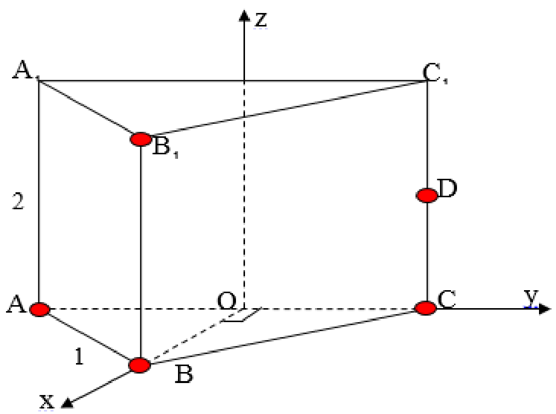
$$tg\,DHC = \frac{DC}{HC} \Rightarrow tg\,DHC = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow \angle DHC = arctg\,2$$

Ответ: $arctg\,2$

Заметим, что ответ может быть представлен в другой форме: $arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ *или* $arcsin\frac{2\sqrt{5}}{5}$

II способ

1) Пусть O – середина отрезка AC. Т.к. призма правильная, то треугольник ABC – правильный и $BO \perp AC$. Тогда $BO = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
2) Введем прямоугольную систему координат с центром в точке O, направив ось абсцисс вдоль прямой BO, ось ординат - вдоль прямой OC, ось аппликат – параллельно прямой AA_1(см. рисунок).



Определим координаты точек A, B, C, D и B_1:

$A(0; -\frac{1}{2}; \quad 0)$; $\quad B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$; $\quad C(0; \frac{1}{2}; 0)$; $B1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 2\right)$; D(0; $\frac{1}{2}$; 1)

3) Т.к. $CC_1 \parallel$ (ABC), то $\overline{CD}\{0; 0; 1\}$ – нормаль к плоскости ABC.

4) Составим уравнение плоскости ADB_1:

$$\begin{cases} 0a - \frac{1}{2}b + 0c = 1; \\ 0a + \frac{1}{2}b + c = 1; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}a + 0b + 2c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2\sqrt{3}; \\ b = -2; \\ c = 2 \end{cases}$$

Уравнение плоскости ADB_1: $-2\sqrt{3}x + 2y + 2c = 1$. Тогда $\bar{n}\{-\sqrt{3}; -1; 1\}$ – нормаль к плоскости ADB_1.

5) $\cos(\widehat{ABC; ADB1}) = \left|\cos(\widehat{\overline{CD}; \bar{n}})\right| = \left|\frac{0+0+1}{\sqrt{0+0+1}\cdot\sqrt{3+1+1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$

Тогда $\angle(\text{ABC}; ADB1) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

<u>18. Неравенства, системы неравенств.</u>

Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 4^{x+2} - 257 \cdot 2^x + 16 \le 0, \\ 2\log_2 \dfrac{x+2}{x-3,7} + \log_2 (x-3,7)^2 \ge 2. \end{cases}$$

Решение.

Решим первое неравенство. Сделаем замену $y = 2^x$, имеем:

$$16y^2 - 257y + 16 \le 0 \Leftrightarrow (y-16)(16y-1) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le y \le 16.$$

Отсюда получаем решение первого неравенства:

$$\frac{1}{16} \le 2^x \le 16 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4.$$

Решим второе неравенство. Первое слагаемое определено при $\frac{x+2}{x-3,7} > 0$, то есть при $x < -2$или $x > 3,7$. Преобразуем неравенство:

$$\log_2 \frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2} + \log_2 (x-3,7)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \log_2 (x+2)^2 \ge 2 \Leftrightarrow (x+2)^2 \ge 4 \Leftrightarrow x(x+4) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -4; \\ x \ge 0. \end{array}\right.$$

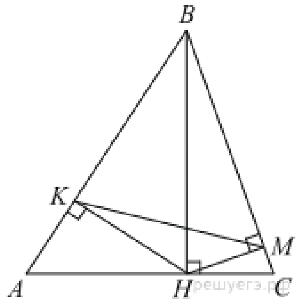
Получаем решение второго неравенства:

$$\left[\begin{array}{l} x \le -4 \\ x > 3,7. \end{array}\right.$$

Решением системы является общая часть решений обоих неравенств: $x = -4$ или $3{,}7 < x \leq 4$.

Ответ: $\{-4\} \cup (3{,}7;\ 4]$.

19. Планиметрические задачи



В остроугольном треугольнике *ABC* провели высоту *BH* из точки *H* на стороны *AB* и *BC* опустили перпендикуляры *HK* и *HM* соответственно.

а) Докажите, что треугольник *MBK* подобен треугольнику *ABC*.

б) Найдите отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*, если *BH* = 1, а радиус окружности, описанной около треугольника *ABC*, равен 4.

Решение.

а) Пусть угол *BAC* = α. Углы *BAC* и *KHB* равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник *BKHM*: ∠*BKH* + ∠*BMH* = 90° + 90° = 180°, следовательно, четырёхугольник *BKHM* вписан в окружность. Значит, $\angle KHB = \angle KMB,$ как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу. Таким образом, ∠*BAC* = ∠*KHB* = ∠*KMB*. Треугольники *ABC* и *MBK* имеют общий угол *B* и ∠*BAC* = ∠*KMB*, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника *BKH* находим, что $BH = \frac{BK}{\sin\angle KHB}.$ Для треугольника *ABC* справедливо равенство $2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC}.$ Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$ получаем: $\frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH}.$ Стороны *BC* и *BK* — сходственные в подобных треугольниках *ABC* и *MBK*, следовательно, их коэффициент подобия $k = \frac{BC}{BK} = \frac{2R}{BH} = 8.$ Найдём отношение площади треугольника *MBK* к площади четырёхугольника *AKMC*:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{64 - 1} = \frac{1}{63}.$$

Ответ: $\frac{1}{63}.$

20. Уравнения, неравенства и их системы с параметрами

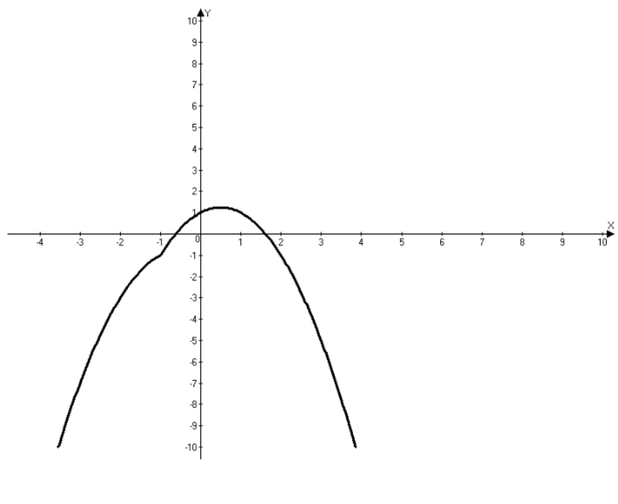
Найдите все значения *a*, при каждом из которых наибольшее значение функции $f(x) = |x - a| - x^2$ не меньше 1.

Решение.

Запишем данную функцию в следующем виде:

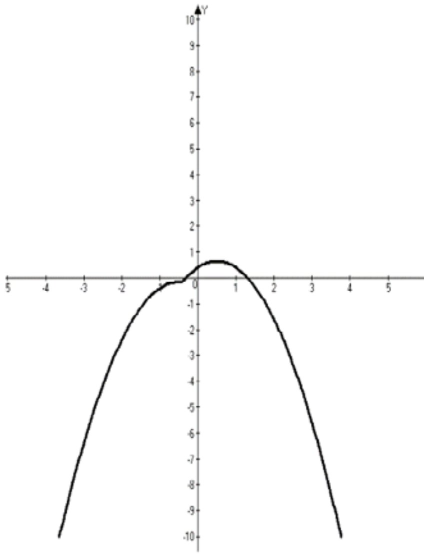
$$f(x) = \begin{cases} a - x - x^2 \text{ при } x < a, \\ x - a - x^2 \text{ при } x \geq a \end{cases}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой. Ее график состоит из частей двух парабол, ветви которых направлены вниз. Абсциссы вершин парабол равны $x = -0{,}5$ и $x = 0{,}5$.



Если $a \in (-\infty; -0{,}5]$, то функция $f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; a)$, далее продолжает возрастать при $x \in [a; 0{,}5]$ и убывает при $x \in [a; +\infty)$.

Следовательно, $f(x)$ достигает наибольшего значения в единственной точке $x = 0{,}5$. Найдем, при каких значениях a, $a \in (-\infty; -0{,}5]$, наибольшее значение функции $f(x)$ не меньше 1:



$$f(0{,}5) \geq 1 \Rightarrow 0{,}5 - a - (0{,}5)^2 \geq 1 \Rightarrow 0{,}25 - a \geq 1 \Rightarrow a \leq -0{,}75$$

Если $a \in (-0{,}5; -0{,}5)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения в точке $x = -0{,}5$ или $x = 0{,}5$. Найдем, при каких значениях a, $a \in (-0{,}5; -0{,}5)$, наибольшее значение функции $f(x)$ не меньше 1:

$$\left[\begin{array}{l} f(-0{,}5) \geq 1, \\ f(0{,}5) \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a - (-0{,}5) - (-0{,}5)^2 \geq 1, \\ 0{,}5 - a - (0{,}5)^2 \geq 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

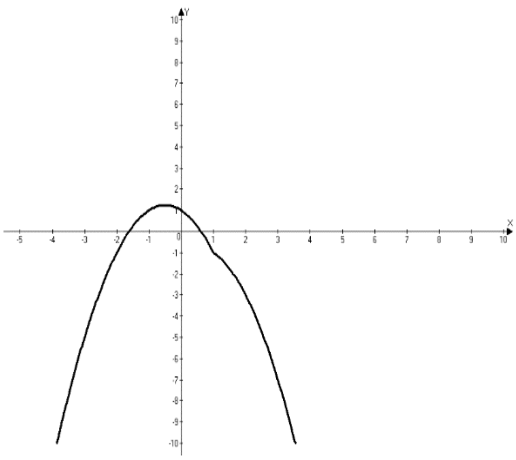
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a + 0{,}25 \geq 1, \\ 0{,}25 - a \geq a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a \geq 0{,}75, \\ a \leq -0{,}75 \end{array}\right.$$

Следовательно, при $a \in (-0{,}5; -0{,}5)$ наибольшее значение функции меньше 1.

Если $a \in [-0{,}5; +\infty)$, то функция $f(x)$ достигает наибольшего значения в единственной точке $x = -0{,}5$.

Найдем, при каких значениях a, $a \in [-0{,}5; +\infty)$, наибольшее значение функции $f(x)$ не меньше 1:

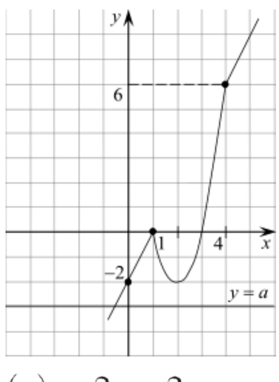
$$f(-0{,}5) \geq 1 \Rightarrow a - (-0{,}5) - (-0{,}5)^2 \geq 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a - 0{,}25 \geq 1 \Rightarrow a \geq 0{,}75$$



Ответ: $a \in (-\infty; -0{,}75] \cup [0{,}75; +\infty)$

или

Найдите все значения a, при каждом из которых график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4| - a$ пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.



Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$g(x) = x^2 - 3x + 2 - |x^2 - 5x + 4|.$$

График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x \leq 1$ или $x \geq 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = x^2 - 5x + 4$; и $g(x) = 2x - 2$.

Если $1 < x < 4$, то $|x^2 - 5x + 4| = -x^2 + 5x - 4$; и $g(x) = 2x^2 - 8x + 6$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x) = a$ имеет менее трех корней, только если $a \leq g(2)$ или $a \geq g(1)$, то есть при $a \leq -2$ или $a \geq 0$.

Ответ: $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$.

21. Числа и их свойства.

Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 792 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Заметим, что $792 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11$.

а) Пусть это $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ aq^4$. Тогда их произведение равно a^5q^{10}; и $aq^2 = \sqrt[5]{792} \notin \mathbb{Z}$.

б) Пусть это $a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3,\ b$; q не обязано быть целым, но должно быть рациональным. Пусть $q = \frac{x}{y}$ — несократимая дробь, тогда имеем $\frac{a^4x^6b}{y^6} = 792$. Значит, 792 кратно x^6 (оно не может сокращаться со знаменателем), откуда $x = 1$. Значит, a кратно y^3 (иначе aq^3 —нецелое), a^4 кратно y^{12}; 792 кратно y^6 (оно не сократилось), откуда $y = 1$ и прогрессия постоянна.

в) Да, например 1,2,4,9,11.

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.